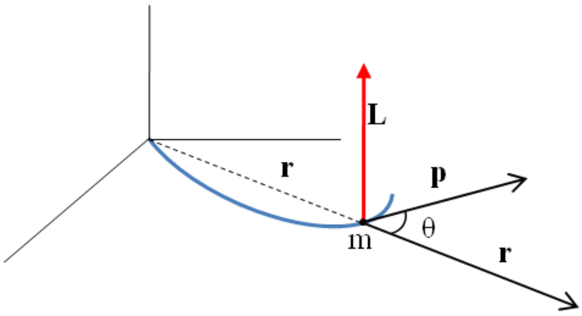
Ampliación: Conservación del Momento angular L

La 2ª Ley de Kepler se puede deducir de la Ley de la Conservación del Momento angular.

Consideremos un cuerpo de masa m que se desplaza con velocidad **v** y está sometido a una fuerza externa **F**. Definiremos en este caso las siguientes magnitudes físicas:



– La cantidad de movimiento o momento lineal es el producto escalar de la masa por el vector velocidad

$$\mathbf{p} = m\cdot\mathbf{v}$$

– El momento angular es el momento de la cantidad de movimiento, es decir el producto vectorial de los vectores de posición y momento lineal **r** y **p**

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\cdot(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \qquad |\mathbf{L}| = m\cdot r\cdot v\cdot \text{sen}\,\theta$$

– El momento de una fuerza es el producto vectorial de los vectores de posición y fuerza, **r** y **F**

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

➢ Analicemos como es la variación de **L** con el tiempo

$$d\mathbf{L}/dt = m\cdot d(\mathbf{r} \times \mathbf{v})/dt = m\cdot((d\mathbf{r}/dt \times \mathbf{v}) + (\mathbf{r} \times d\mathbf{v}/dt)) = m\cdot((\mathbf{v} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{r} \times \mathbf{a})) = \mathbf{0} + (\mathbf{r} \times m\cdot\mathbf{a}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}$$

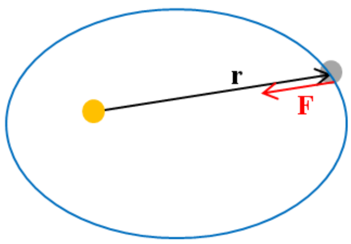
Por tanto siempre se cumple que el momento de una fuerza es igual a la variación del momento angular

$$\mathbf{M} = d\mathbf{L}/dt$$

➢ Un planeta que gira alrededor del Sol está sometido a una fuerza central, ya que ésta siempre se dirige hacia el mismo punto: nuestra estrella.

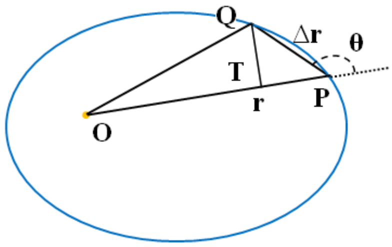
En este caso los vectores **r** y **F** forman un ángulo de 180º y su producto vectorial es nulo, ya que sen 180º = 0

$$\mathbf{M} = d\mathbf{L}/dt = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{L} = \text{cte}$$



Para fuerzas centrales el momento angular **L** se mantiene constante. Es la ley de la conservación del Momento Angular

L es constante en dirección
→ los vectores **r** y **v** están siempre en el mismo plano
→ las órbitas deben de ser planas



$|\mathbf{L}|$ es constante $\rightarrow L = m\cdot r\cdot v \cdot \text{sen}\,\theta = \text{cte}$

Considerando que $v = \Delta r/\Delta t$ y $\Delta r\cdot \text{sen}\,\theta = QT$

$$L = m\cdot r\cdot v \cdot \text{sen}\,\theta = (m\cdot r\cdot \Delta r\cdot \text{sen}\,\theta)/\Delta t = (m\cdot r\cdot QT)/\Delta t$$

La superficie del triángulo OQP es

$$S_T = (r\cdot QT)/2 \rightarrow r\cdot QT = 2\cdot S_T \rightarrow L = m\cdot 2\cdot S_T/\Delta t = \text{cte}$$

Puesto que la masa es constante, podemos indicar que $S_T/\Delta t$ es constante, que coincide con el enunciado de la 2ª Kepler.