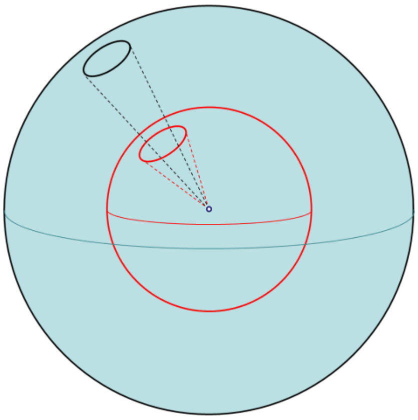
Relación matemática entre magnitud aparente, distancia y magnitud absoluta

La distancia y el brillo aparente

Imaginemos un foco puntual de luz a 1 m de nosotros. Podemos pensar que su luz se desparrama por toda una superficie esférica de 1 m de radio y nosotros interceptamos unos pocos fotones, los que lleguen a nuestro ojo. El área de esa superficie esférica se calcula con la fórmula $S = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 1^2 = = 12{,}566\ m^2$. Si suponemos que nuestro foco luminoso emite 1.000 fotones por segundo, entonces, a esa distancia de 1 m, esos 1.000 fotones tienen que repartirse entre 12,566 m^2 y "tocan" a razón de 1.000/12,566 = 80 fotones /m^2.



Alejemos ahora ese foco al doble de distancia, a 2 m. Entonces su emisión tendrá que repartirse por una superficie esférica de 2 m de radio. Es una esfera el doble de grande, pero su superficie mide $4 \cdot \pi \cdot 2^2 = 4 \cdot \pi \cdot 4 \approx 50{,}27\ m^2$ que no es el doble, sino cuatro veces (puesto que $2^2 = 4$). Los 1.000 fotones tienen ahora que cubrir 50,27 m^2 y tocan solo a 1.000/50,27 = 20 fotones/m^2. Lo vamos a ver 4 veces más débil, 4 veces menos luminoso.

El brillo final (a 2 metros) es B' = ¼ del brillo inicial B (a 1 metro). Por eso diremos que la variación en el brillo ha sido $\Delta B = 1/4 = 0{,}25$.

Si lo alejáramos a 3 m, el radio es triple, pero la superficie, puesto que es proporcional al radio al cuadrado, ha aumentado $3^2 = 9$ y el foco se nos aparecería como veces 9 más débil. Ahora $B' = 1/9 \cdot B$ y la variación en el brillo ha sido en un factor $\Delta B = 1 / 9 \approx 0{,}11$. Y si lo pusiéramos a 4,5 m pues lo veríamos $4{,}5^2 \approx 20$ veces menos luminoso (es decir $\Delta B = 1/20 = 0{,}05$ de su brillo inicial).

Y si lo acercáramos, todo es prácticamente igual salvo que en este caso su brillo aparente aumentaría. A 0,5 m (la mitad de distancia) lo veríamos 4 veces más destacado: la superficie esférica ahora es más pequeña en un factor $0{,}5^2 = 0{,}25 = ¼$ por lo que ahora los 1.000 fotones que emite nuestro foco por segundo tienen que repartirse en una superficie 4 veces menor y resultará una densidad 4 veces mayor, 320 fotones / m^2. El brillo aparente ahora será $B' = 4 \cdot B$ y diremos que $\Delta B = 4$.

Y si lo acercáramos hasta 0,37 m, los cálculos que hay que hacer son:
$0{,}37^2 \approx 0{,}1369 \quad \rightarrow \quad \Delta B = 1 / 0{,}1369 \approx 7{,}3$ veces el brillo inicial.

En general si tenemos un foco de luz a una distancia d y lo movemos hasta otra distancia d' el radio de la superficie esférica entre el foco y nuestro ojo se va a multiplicar por un factor que es d'/d, pero su superficie se va a multiplicar por ese factor al cuadrado $(d'/d)^2$ y por consiguiente nosotros veremos ahora ese mismo punto luminoso con un brillo que será $1 / (d'/d)^2$ veces el anterior: $\Delta B = 1 / (d'/d)^2$, fórmula que podemos simplificar $\Delta B = (d/d')^2$. Si alejamos el foco, es decir si $d' > d \rightarrow \Delta B < 1$ y el objeto pasa a verse más débil. En cambio si $d' < d$ (lo acercamos) entonces $\Delta B > 1$ y nos parecerá más brillante.

La formulación final

Supongamos una estrella de magnitud aparente m situada a una distancia de D pc de la Tierra. Si la movemos (imaginariamente, claro) hasta situarla a 10 pc su brillo aparente, tal y como acabamos de explicar, se verá multiplicado por un factor $\Delta B = 1 / (10/D)^2 = (D/10)^2$.

Por ejemplo, Aldebarán tiene una D = 20 pc. Si estuviera solo a 10 su brillo aparente se vería multiplicado por un factor $\Delta B = 4$, ya que $\Delta B = (20/10)^2 = 4$. Cuatro veces más brillante, ¿qué cambio supone en cuanto a magnitud? Hemos visto que un cambio en el brillo de un factor de $f = \sqrt[5]{100} \approx 2{,}512$ supone un cambio en la magnitud de una unidad, un cambio de $f^2 \approx 6{,}3$ supone un cambio en la magnitud de 2 unidades, de $f^3 \approx 16$ un cambio de 3 unidades, etc. El cambio de magnitud correspondiente a un cambio en el brillo por un factor de 4 será un número Δm que cumpla que $f^{\Delta m} = 4$

Tomando logaritmos $\rightarrow$ $\log f^{\Delta m} = \log 4$ $\rightarrow$ $\Delta m \cdot \log f = \log 4$ $\rightarrow$ $\Delta m = \log 4 / \log f$

Pero $\log f = \log \sqrt[5]{100} = 1/5 \cdot \log 100 = 1/5 \cdot 2 = 2/5 = 0{,}4$

Así que $\Delta m = \log 4 / 0{,}4 = 0{,}6 / 0{,}4 = 1{,}5$

Aldebarán, al situarla a 10 pc se vería con una magnitud 1,5 unidades más brillante que a su distancia real. Es decir su magnitud absoluta será 1,5 unidades más brillante que su magnitud aparente: la magnitud aparente, m, es 0,85, así tendremos que restarle 1,5 y obtenemos que la magnitud absoluta es $M = 0{,}85 - 1{,}5 = -0{,}65$.

Por el contrario, para Sirio, que está a 8,8 años luz, resulta ser $D = 8{,}8 / 3{,}26 = 2{,}7$ pc. El brillo aparente de Sirio, al alejarla de 2,7 pc a 10 pc, se verá reducido. ¿En qué factor?
$\Delta B = (D/10)^2 = (2{,}7 / 10)^2 = 0{,}27^2 = 0{,}073$, se queda solo en el 0,073 del que tenía (un 7,3%).

Veamos ahora ese cambio en el brillo cuántas unidades de magnitud suponen.

Δm: tendrá que cumplir que $f^{\Delta m} = \Delta B = 0{,}073$

Tomando logaritmos:

$$\Delta m \cdot \log f = \log 0{,}073 \rightarrow \Delta m \cdot 0{,}4 = -1{,}14 \rightarrow \Delta m = -1{,}14 / 0{,}4 = -2{,}84$$

Sirio se verá 2,84 magnitudes menos brillante, así que a su magnitud aparente habrá que sumarle 2,84 unidades.

Como su magnitud aparente es $m = -1{,}5$ $\rightarrow$ $M = -1{,}5 + 2{,}84 = 1{,}35$.

De nuevo ha habido que cambiarle el signo a Δm.

Para cualquier estrella será siempre $M = m - \Delta m$.

En general, al mover una estrella desde su distancia real D (en pc) hasta situarla a 10 pc su brillo se multiplica por un factor $\Delta B = (D/10)^2$.

El cambio en la magnitud aparente provocado por ese movimiento será un número Δm tal que

$f^{\Delta m} = (D/10)^2$

Tomando logaritmos y simplificando

$\log f^{\Delta m} = \log (D/10)^2 \rightarrow \Delta m \cdot \log f = 2 \cdot \log (D/10) \rightarrow \Delta m \cdot 2/5 = 2 \cdot (\log D - \log 10)$

$\Delta m = 5/2 \cdot 2 \cdot (\log D - 1) = 5 \cdot (\log D - 1) = 5 \cdot \log D - 5$

Como $M = m - \Delta m \rightarrow$ $\mathbf{M = m - 5 \cdot \log D + 5}$

Que es la fórmula final y general que permite calcular la magnitud absoluta M de una estrella conociendo la aparente m y la distancia D expresada en pc.

Si lo que nos interesa es calcular la distancia D a partir de m y M, no hay más que despejar D en la fórmula anterior:

$5 \cdot \log D = 5 + m - M \rightarrow \log D = \frac{5+m-M}{5} = 1 + \frac{m-M}{5} \rightarrow \mathbf{D = 10^{1+\frac{m-M}{5}}}$